

原对偶积极集法求解改进的有界约束图像恢复问题

孙肖 李维国

(中国石油大学(华东)数学与计算科学学院, 东营 257061)

摘要 为了提高模糊加噪声图像的恢复质量,提出了一种用于图像恢复处理的改进的带约束的正则化模型。该模型首先利用 Levine 等人提出的变指数、线性增长函数作为正则项,并根据图像局部特征选择合适的正则参数,这样既保留了总变差正则化方法在恢复图像边缘方面的优势,又减少了梯子现象;其次,为进一步提高恢复图像的质量,在此基础上再添加有界约束条件,如将灰度值固定在某范围内,以形成约束优化问题。由于它的求解相对复杂,为此可应用原对偶积极集法求解,其实质就是用半光滑 Newton 法来求解由约束优化问题转化所得到的方程组。数值实验表明,此方法是可行的和有效的。

关键词 图像恢复 有界约束 原对偶积极集方法 正则化方法

中图法分类号: TP391.41 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2009)03-0435-08

A Primal-dual Active-set Method for Modified Bound Constrained Image Restoration Problems

SUN Xiao, LI Wei-guo

(School of Mathematics and Computational Sciences, Petroleum University of China, Dongying, 257061)

Abstract In this paper, a modified bound constrained regularization model was proposed for image denoising and deblurring. In the model, we choose the variable exponent linear growth function proposed by Levine as the regularization term and choose the regularization parameters adaptively according to the image local feature. It not only preserves the advantage of the total variation regularization model, but also reduces staircase. Then, we introduce some bound constraints to the modified model, such as limit the range of u , to improve the quality of the restored image. At last, the constrained minimization problems are solved by primal-dual active-set method, essentially a semi-smooth Newton's method. The numerical results show that our method is feasible and valid.

Keywords image restoration, bound constraint, primal-dual active-set method, regularization method

1 引言

对于一幅图像(以2维图像为例),通常可用函数 $u(x, y): \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ 来表示, Ω 为 \mathbf{R}^2 上的有界开集。由于受大气湍流、相对运动等因素的影响,致使实际获得的图像不可避免地存在着不同程度的模糊和噪声,从而引起图像的降质。对于空间位移不变的图像降质过程,可用下述模型来表示:

$$f(x, y) = k(x, y) * u(x, y) + n(x, y) \quad (1)$$

式中, $f(x, y)$, $u(x, y)$, $n(x, y)$ 分别表示连续的降质图像、清晰图像和引入的随机噪声, $k(x, y)$ 为点扩散函数(PSF), “*”表示卷积运算。图像恢复的任务就是在已知降质图像的情况下求出原清晰图像,若 $k(x, y)$ 未知,即是盲图像恢复问题,在此仅讨论点扩散函数已知的情况。

由于图像恢复是个不适定问题,因此 $f(x, y)$ 即使发生微小的扰动,也会导致图像恢复结果与真解

收稿日期:2007-08-29;改回日期:2007-11-13

第一作者简介:孙肖(1983~),女。2008年获中国石油大学(华东)计算数学专业硕士学位。研究方向为图形图像处理及反问题的数值解法。E-mail: sunxiao328@sina.com

相差甚远。对此人们多采用正则化方法求解,如 Rudin 等人提出了将总变差(TV)正则项应用于图像去噪处理^[1],其后又扩展到图像去噪去模糊问题中,即得到如下形式的总变差正则化模型(也称 ROF 模型):

$$u_r(x,y) = \operatorname{argmin} \left\{ \frac{1}{2} \int (k(x,y) * u(x,y) - f(x,y))^2 dx dy + \alpha \int |\nabla u(x,y)| dx dy \right\} \quad (2)$$

式中, $u_r(x,y)$ (下角 r 表示 restored) 表示恢复图像,由于 $\|u(x,y)\|_{TV}$ 不惩罚不连续处,因此能较好地恢复图像的边缘,现已被广泛地应用,但由于噪声的影响,致使 ROF 模型恢复出的图像,在平滑区域会产生一些虚假边界,即所谓的梯子现象,为了消除这些虚假边界,人们也提出了许多改进模型,具体可参见文献 [2] ~ [5]。另外,对于去模糊问题,为了能够提高恢复图像的质量,常对模型添加约束条件,如非负约束,其在信号处理、图像恢复中应用广泛,具体可参见文献 [6] ~ [8]。

2 改进的图像恢复模型

2.1 正则项的选择

对于图像恢复问题,当卷积算子为恒等算子时,其对应单纯的图像去噪。总变差最小化问题在图像去噪过程中首先使用,后被成功应用到图像去噪去模糊、图像修补等领域。

前面已经说过,ROF 模型在去噪时会产生梯子现象,为了去除梯子现象,许多学者针对正则项的选取做了改进,即根据图像的局部特征自适应选取正则项,如,Chambolle 和 Lions 提出了如下形式的正则项^[3]:

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_{|\nabla u| < \varepsilon} |\nabla u(x,y)|^2 dx dy + \int_{|\nabla u| > \varepsilon} |\nabla u(x,y)| dx dy - \frac{\varepsilon}{2} \quad (3)$$

式中,对于梯度较大的边界选取 TV 正则项,对于梯度较小的平滑区域选取 Tikhonov 正则项,这样组合后虽可以取得较好的数值恢复结果,但对参数 ε 的选择比较敏感。

类似道理,Blomgren、Chan、Mulet 等人提出将 $\int |\nabla u(x,y)|^{p(|\nabla u(x,y)|)} dx dy$ 作为正则项^[4],其中, $p(s)$ 为以下定义的单减函数:

$$\lim_{s \rightarrow 0} p(s) = 2, \lim_{s \rightarrow \infty} p(s) = 1 \quad (4)$$

利用该函数虽然可以取得不错的数值恢复效果,但由于其下半连续性还未得到证明,因此模型的理论分析比较困难。

其后,Levine、Stanich 及 Chen 等人提出了如下形式的正则项,用于图像去噪模型^[5]:

$$\varphi(x,y, \nabla u(x,y)) = \begin{cases} \frac{1}{p(x,y)} |\nabla u(x,y)|^{p(x,y)}, & |\nabla u(x,y)| < \varepsilon \\ |\nabla u(x,y)| - \frac{p(x,y) - 1}{p(x,y)}, & |\nabla u(x,y)| \geq \varepsilon \end{cases} \quad (5)$$

式中, ε 为给定的阈值, $p(x,y)$ 的取值可选为 $p(x,y) = 1 + \frac{1}{1 + k_1 |\nabla(G_\sigma(x,y) * f(x,y))|^2}$, $G_\sigma(x,y)$ 为 Gauss 核函数,由式(5)可以看出, $|\nabla(G_\sigma(x,y) * f(x,y))|$ 越大, $p(x,y)$ 的值越接近 1,越近似总变差正则项;反之, $p(x,y)$ 的值越近 2,越靠近 Tikhonov 正则项。这样就可以根据图像的局部特征来选择正则项,并可克服式(3)对参数 ε 的选择比较敏感的缺点,在文献[5]中还给出了详细的理论分析。

Chen 和 Zheng 等人已成功地将其拓展到图像恢复模型中^[9-10],即

$$u_r(x,y) = \operatorname{argmin} \left\{ \int \varphi(x,y, \nabla u(x,y)) dx dy + \int |D^S u(x,y)| dx dy + \frac{\alpha}{2} \int (k(x,y) * u(x,y) - f(x,y))^2 dx dy \right\} \quad (6)$$

式中, S 为 $u(x,y)$ 的零 Lebesgue 测度集, D 为定义的导数算子,使 $Du(x,y)$ 可 Lebesgue 分解为 $\nabla u(x,y) \cdot L_2 + D^S u(x,y)$, L_2 为 \mathbf{R}^2 上的 2 维 Lebesgue 测度,而 $D^S u(x,y) = C_u + J_u$, J_u 为 $u(x,y)$ 的 Hausdorff 即跳跃部分, C_u 为其 Cantor 部分, $\varphi(x,y, \nabla u(x,y))$ 按式(5)取值。

本文将式(5)应用到图像去噪去模糊模型中,即得到如下模型:

$$u_r(x,y) = \operatorname{argmin} \left\{ \alpha \int \varphi(x,y, \nabla u(x,y)) dx dy + \frac{1}{2} \int (k(x,y) * u(x,y) - f(x,y))^2 dx dy \right\} \quad (7)$$

式中, α 为正则化参数, $\varphi(x,y, \nabla u(x,y))$ 按式(5)选择, $u(x,y)$, $f(x,y)$ 分别为原始图像、降质图像,

$k(x, y)$ 为点扩散函数。

2.2 正则化参数的选择

对于式(7)模型,整幅图像可选用相同的正则化参数,如果 α 选得过小,则噪声不能得到很好地抑制,尤其是视觉上对噪声比较敏感的平滑区域,恢复效果不好;如果 α 选得过大,噪声虽然得到了较好地抑制,但边缘、细节等信息却发生了模糊,甚至丢失,这样选择参数时,只能基于整体考虑来达到一种平衡,不具有自适应性。

关于正则化参数的选择,也可以根据图像局部特征的不同而选择不同的值,如 Strong、Blomgren 及 Chan 等人提出的自适应总变差模型^[11]就采用 $\int \alpha(x, y) |\nabla u(x, y)| dx dy$ 作为正则项,其中 $\alpha(x, y)$ 依赖细节信息保有量及误差水平,可简单地选为单减函数。

类似地,模型式(7)就可改写为

$$u_r(x, y) = \operatorname{argmin} \left\{ \int \alpha(x, y) \varphi(x, y, \nabla u(x, y)) dx dy + \frac{1}{2} \int (k(x, y) * u(x, y) - f(x, y))^2 dx dy \right\} \quad (8)$$

$\alpha(x, y)$ 总的选取原则是对于 $|\nabla u(x, y)|$ 较大的边缘区域,由于模糊算子对其影响较大,且视觉上对噪声的敏感程度比平滑区域要弱一些,故为了保持其尖锐性, α 可以选得小一些;而对于 $|\nabla u(x, y)|$ 较小的平滑区域,由于模糊算子对其影响相对小一些,反而是对噪声更敏感,故 α 可以选择得大一些。实际上,因式(7)是式(8)中 $\alpha(x, y) = \alpha$ 时对应的一种特殊情况,故采用模型式(8)自适应地选择正则参数更具一般性。

2.3 有界约束条件的添加

大家知道,对于图像的先验信息掌握得越多,恢复出的图像就越接近原始的清晰图像,如在信号处理、图像恢复时常常添加非负约束^[6-8]。由于实际得到的数字图像均是离散的,可用2维矩阵来表示,通常其灰度值为 $0 \sim 255$,因此可对图像恢复模型(式(8))进行离散化处理,并针对灰度值添加此双边约束 $0 \leq u \leq 255$ 。另外,假设真实数字图像 $\|u\|^2 = \Sigma_1^2$,则希望恢复图像的范数值与 Σ_1 足够接近,于是考虑添加 $J_1(u) = \operatorname{abs}(\Sigma_1^2 - \|u\|^2)$,希望恢复出的图像可使 $J_1(u)$ 达到最小,其中 $\|u\|_{1,2}^2 = \|u\|^2 + \|\nabla u\|^2$ 。对式(8)添加如上约束后,模型

即变为

$$\begin{cases} \min \left\{ \|\alpha \varphi\|_1 + \frac{1}{2} \|Ku - f\|^2 + \mu J_1(u) \right\} \\ \text{s. t. } 0 \leq u \leq 255 \end{cases} \quad (9)$$

其中, u, f 为原图像和观测图像矩阵拉直后形成的向量,即

$$\begin{aligned} u &= (u_{1,1}, \dots, u_{i,j}, \dots, u_{m,n})^T \\ f &= (f_{1,1}, \dots, f_{i,j}, \dots, f_{m,n})^T \end{aligned}$$

K 为卷积算子离散形成的与拉直向量 u 对应的块 Toeplitz 矩阵, $\alpha = \operatorname{diag} \{(\alpha_{1,1}, \dots, \alpha_{i,j}, \dots, \alpha_{m,n})^T\}$ 为与各点对应的由正则化参数组成的矩阵, φ 为正则项拉直后形成的向量 $\varphi = (\varphi_{1,1}, \dots, \varphi_{i,j}, \dots, \varphi_{m,n})^T$, 选取 $\varphi_{i,j}$ 的公式为

$$\varphi_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{p_{i,j}} \sqrt{|\nabla u_{i,j}|^2 + \beta}^{p_{i,j}} & |\nabla u_{i,j}| < \varepsilon \\ \sqrt{|\nabla u_{i,j}|^2 + \beta} - \frac{p_{i,j} - 1}{p_{i,j}} & |\nabla u_{i,j}| \geq \varepsilon \end{cases} \quad (10)$$

式中, $p_{i,j} = 1 + \frac{1}{1 + k_1 |\nabla(G_\sigma * f_{m \times n})_{i,j}|^2}$, $f_{m \times n}$ 为观测图像矩阵, G_σ 为离散 Gauss 核矩阵。因与式(9)对应的 Euler 方程中要求 $\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u_{i,j}}{|\nabla u_{i,j}|^{r_{i,j}}} \right)$, 为避免 $|\nabla u_{i,j}|$ 接近 0 的情况出现,此处在于式(10)中引入了一个适当的正数 β , 以利用式(10)来近似式(5)。

对于约束优化模型(式(9)),其 K-T 条件可写为下式:

$$\begin{cases} -V(\bar{\alpha} E_1 Tu) + K^T(Ku - f) - \mu(u - V(Tu)) - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1^T u = 0, (\lambda_1)_{i,j} \geq 0, u_{i,j} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n \\ \lambda_2^T(255e - u) = 0, (\lambda_2)_{i,j} \geq 0, u_{i,j} \leq 255 \end{cases} \quad (11)$$

式中, T 为与拉直向量 u 对应的梯度算子矩阵,即 $Tu = [(u_{1,1})_x, (u_{1,1})_y, \dots, (u_{i,j})_x, (u_{i,j})_y]^T$, V 为使 $(V(Tu))_{i,j} = (u_{i,j})_{xx} + (u_{i,j})_{yy}$ 成立的散度算子矩阵, μ 为 Lagrange 系数, λ_1, λ_2 为对离散图像灰度值进行加双边约束后,由与各点对应的 Lagrange 系数矩阵拉直形成的向量, $e = (1, \dots, 1)^T$, 其长度与参与运算的向量匹配,此时正则化参数组成的矩阵变为

$$\bar{\alpha} = \operatorname{diag} \{(\alpha_{1,1}, \alpha_{1,1}, \dots, \alpha_{i,j}, \alpha_{i,j}, \dots, \alpha_{m,n}, \alpha_{m,n})^T\}$$

$$E_1 = \text{diag} \left\{ \left[\frac{1}{(\sqrt{|\nabla u_{1,1}|^2 + \beta})^{r_{1,1}}}, \frac{1}{(\sqrt{|\nabla u_{1,1}|^2 + \beta})^{r_{1,1}}}, \dots, \frac{1}{(\sqrt{|\nabla u_{i,j}|^2 + \beta})^{r_{i,j}}}, \frac{1}{(\sqrt{|\nabla u_{i,j}|^2 + \beta})^{r_{i,j}}}, \dots, \frac{1}{(\sqrt{|\nabla u_{m,n}|^2 + \beta})^{r_{m,n}}}, \frac{1}{(\sqrt{|\nabla u_{m,n}|^2 + \beta})^{r_{m,n}}} \right]^T \right\}$$

$r = (r_{1,1}, \dots, r_{i,j}, \dots, r_{m,n})^T$, 其值可选为

$$r_{i,j} = \begin{cases} 1 & |\nabla u_{i,j}| \geq \varepsilon \\ 2 - p_{i,j} & |\nabla u_{i,j}| < \varepsilon \end{cases}$$

本文算法是根据先验信息 $G_\sigma * f_{m \times n}$ 用下式来近似取值:

$$r_{i,j} = \begin{cases} 1 & |\nabla(G_\sigma * f_{m \times n})_{i,j}| \geq \varepsilon \\ 2 - p_{i,j} & |\nabla(G_\sigma * f_{m \times n})_{i,j}| < \varepsilon \end{cases}$$

$$p_{i,j} = 1 + \frac{1}{1 + k_1 |\nabla(G_\sigma * f_{m \times n})_{i,j}|^2} \quad (12)$$

3 数值求解方法

对于无约束总变差模型, 求解方程中含有形如 $\nabla u_{i,j}/|\nabla u_{i,j}|$ 的非线性项(为了避免出现 $|\nabla u_{i,j}| \approx 0$ 的情况, 可令 $\sqrt{|\nabla u_{i,j}|^2 + \beta}$ 代替 $|\nabla u_{i,j}|$), Chan 等人提出了原对偶方法^[12], 数值试验结果表明, 原对偶方法具有较好的稳定性和较快的收敛性。Krishnan 等人利用原对偶积极集方法求解非负约束下的总变

差模型^[8], 数值试验结果表明, 该方法是有有效的。由此, 本文也用此思路来求解式(11)。

式(11)可等价写为如下形式:

$$\begin{cases} F_1 = E_1^{-1} w - Tu = 0 \\ F_2 = -V(\bar{\alpha} w) + K^T(Ku - f) - \mu(u - V(Tu)) - \lambda = 0 \\ F_3 = 0 \end{cases} \quad (13)$$

式中, $F_3 = ((F_3)_{1,1}, \dots, (F_3)_{i,j}, \dots, (F_3)_{m,n})^T$, $(F_3)_{i,j} = \lambda_{i,j} - \max\{0, \lambda_{i,j} - cu_{i,j}\} - \min\{0, \lambda_{i,j} - c(u_{i,j} - 255)\}$

式中, u, w, λ 分别表示待求的向量, c 为任意非负常数, 本文可选取 $c = 1$ 。记约束集 $A^- = \{(i, j) | \lambda_{i,j} - cu_{i,j} > 0\}$, $A^+ = \{(i, j) | \lambda_{i,j} - c(u_{i,j} - 255) < 0\}$, $I = \{(i, j) | (i, j) \notin A^\pm\}$, D_I, D_{A^-}, D_{A^+} 分别表示使 $D_I u = u_I, D_{A^-} u = u_{A^-}, D_{A^+} u = u_{A^+}$ 成立的取样矩阵, 对于式(13), 可用 Newton 法求解, 迭代步长为下述方程组的解:

$$\begin{pmatrix} E_1^{-1} & -FTD_I^T & -FTD_{A^-}^T & -FTD_{A^+}^T & 0 & 0 & 0 \\ -D_I V \bar{\alpha} & D_I B D_I^T & D_I B D_{A^-}^T & D_I B D_{A^+}^T & -E & 0 & 0 \\ -D_{A^-} V \bar{\alpha} & D_{A^-} B D_I^T & D_{A^-} B D_{A^-}^T & D_{A^-} B D_{A^+}^T & 0 & -E & 0 \\ -D_{A^+} V \bar{\alpha} & D_{A^+} B D_I^T & D_{A^+} B D_{A^-}^T & D_{A^+} B D_{A^+}^T & 0 & 0 & -E \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & cE & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & cE & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta w \\ \delta u_I \\ \delta u_{A^-} \\ \delta u_{A^+} \\ \delta \lambda_I \\ \delta \lambda_{A^-} \\ \delta \lambda_{A^+} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} F_1 \\ D_I F_2 \\ D_{A^-} F_2 \\ D_{A^+} F_2 \\ D_I F_3 \\ D_{A^-} F_3 \\ D_{A^+} F_3 \end{pmatrix}$$

其中, E 为单位矩阵, $B = K^T K - \mu(E - VT)$, $F = E - E_2 W G^T$,

$$G = \begin{pmatrix} (u_{1,1})_x & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ (u_{1,1})_y & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (u_{2,1})_x & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (u_{2,1})_y & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & & (u_{i,j})_x & \vdots & \\ \vdots & \vdots & & (u_{i,j})_y & & \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & (u_{m,n})_x & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & (u_{m,n})_y & \end{pmatrix} \quad W = \begin{pmatrix} w_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ w_2 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_3 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_4 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & & w_{i-1} & \vdots & \\ \vdots & \vdots & & w_{i,i} & & \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & w_{2mn-1} & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & w_{2, mn} & \end{pmatrix}$$

$$E_2 = \text{diag} \left\{ \left(\frac{r_{1,1}}{(\sqrt{|\nabla u_{1,1}|^2 + \beta})^{2-r_{1,1}}}, \frac{r_{1,1}}{(\sqrt{|\nabla u_{1,1}|^2 + \beta})^{2-r_{1,1}}}, \dots, \frac{r_{i,j}}{(\sqrt{|\nabla u_{i,j}|^2 + \beta})^{2-r_{i,j}}}, \right. \right. \\ \left. \left. \frac{r_{i,j}}{(\sqrt{|\nabla u_{i,j}|^2 + \beta})^{2-r_{i,j}}}, \dots, \frac{r_{m,n}}{(\sqrt{|\nabla u_{m,n}|^2 + \beta})^{2-r_{m,n}}}, \frac{r_{m,n}}{(\sqrt{|\nabla u_{m,n}|^2 + \beta})^{2-r_{m,n}}} \right)^T \right\}$$

由后3组方程可知,

$$\delta \lambda_l = -\lambda_l, \delta u_{A^-} = -u_{A^-}, \delta u_{A^+} = 255e - u_{A^+},$$

于是上述方程组可简化为

$$\begin{pmatrix} E_1^{-1} & -FTD_l^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -D_l V \bar{\alpha} & D_l B D_l^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -D_{A^-} V \bar{\alpha} & D_{A^-} B D_l^T & -E & \mathbf{0} \\ -D_{A^+} V \bar{\alpha} & D_{A^+} B D_l^T & \mathbf{0} & -E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta w \\ \delta u_l \\ \delta \lambda_{A^-} \\ \delta \lambda_{A^+} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F_1 - FTD_{A^-}^T u_{A^-} + FTD_{A^+}^T (255e - u_{A^+}) \\ D_l (-F_2 + B D_{A^-}^T u_{A^-} - B D_{A^+}^T (255e - u_{A^+}) - \lambda) \\ D_{A^-} (-F_2 + B D_{A^-}^T u_{A^-} - B D_{A^+}^T (255e - u_{A^+})) \\ D_{A^+} (-F_2 + B D_{A^-}^T u_{A^-} - B D_{A^+}^T (255e - u_{A^+})) \end{pmatrix}$$

将上述方程组消元,即可解得 Newton 迭代法的以下迭代增加量:

$$D_l [B - V \bar{\alpha} E_1 F T] D_l^T \delta u_l = -g(u) \quad (14)$$

$g(u) = D_l \{ -V \bar{\alpha} E_1 [Tu - FTD_{A^-}^T u_{A^-} + FTD_{A^+}^T (255e - u_{A^+})] + K^T (Ku - f) - \mu(u - VTu) - B D_{A^-}^T u_{A^-} + B D_{A^+}^T (255e - u_{A^+}) \}$ 解得 δu_l 后,再将其代入原方程,易得

$$\delta w = -w + E_1 Tu - E_1 FT [D_{A^-}^T u_{A^-} - D_{A^+}^T (255e - u_{A^+}) - D_l^T \delta u_l] \quad (15)$$

$$\delta \lambda_{A^-} = D_{A^-} [-V \bar{\alpha} \delta w + B D_l^T \delta u_l + F_2 - B D_{A^-}^T u_{A^-} + B D_{A^+}^T (255e - u_{A^+})] \quad (16)$$

$$\delta \lambda_{A^+} = D_{A^+} [-V \bar{\alpha} \delta w + B D_l^T \delta u_l + F_2 - B D_{A^-}^T u_{A^-} + B D_{A^+}^T (255e - u_{A^+})] \quad (17)$$

算法步骤如下:

(1) 已知观测图像 f , 给定 $\sigma, k_1, \varepsilon, k_2, \alpha$, 则可利用式(12)计算 p, r ; 其对应的正则化参数按下式计算:

$$\alpha_{i,j} = \alpha \frac{k_2}{k_2 + |\nabla(G_\sigma * f_{m \times n})_{i,j}|}$$

给定 β, tol 及 w, u, λ 的初值, $k = 0$;

(2) 记录约束集

$$A_k^- = \{(i, j) \mid \lambda_{i,j}^{(k)} - cu_{i,j}^{(k)} > 0\}$$

$$A_k^+ = \{(i, j) \mid \lambda_{i,j}^{(k)} - c(u_{i,j}^{(k)} - 255) < 0\}$$

$$I_k = \{(i, j) \mid (i, j) \notin A_k^\mp\}$$

常数 c 可选取为 1;

(3) 求解线性方程组(式(14))得 $\delta u_l^{(k)}$: 由于该方程组是非对称的, 因此实际求解时可对其做对称化处理, 即令 $F = E - E_2 (W G^T + G^T W) / 2$;

(4) 利用式(15) ~ 式(17) 计算得 $\delta w^{(k)}, \delta \lambda_{A^-}^{(k)}, \delta \lambda_{A^+}^{(k)}$;

(5) 计算 $s = \rho \sup_z \{ |w_{i,j}^{(k)} + \tilde{c} \delta w_{i,j}^{(k)}| \leq 1, (i, j) \in \{(i, j) \mid r_{i,j} = 1\} \}$

(6) 更新变量 $w^{(k+1)} = w^{(k)} + s \delta w^{(k)}$
 $u_l^{(k+1)} = u_l^{(k)} + \delta u_l^{(k)}, u_{A^-}^{(k+1)} = \mathbf{0}, u_{A^+}^{(k+1)} = 255e$
 $\lambda_{A^-}^{(k+1)} = \lambda_{A^-}^{(k)} + \delta \lambda_{A^-}^{(k)}, \lambda_{A^+}^{(k+1)} = \lambda_{A^+}^{(k)} + \delta \lambda_{A^+}^{(k)}, \lambda_l^{(k+1)} = \mathbf{0}$
 (7) $k = k + 1$;

计算 $e = \sqrt{\|F_1\|^2 + \|F_2\|^2 + \|F_3\|^2}$, 如果 $e \leq tol$, 则停; 否则转步骤 2。

4 数值实验

本文实验是在普通台式计算机(Pentium 4 处理器, 512 MB 内存) Matlab 6.5 环境下模拟完成的。实验中先对清晰图像 u 进行 Gauss 模糊或均匀模糊, 其后添加 Gauss 白噪声 n , 含噪程度由

$$SNR = \frac{\sqrt{\sum (u(i, j) - \bar{u})^2}}{\sqrt{\sum (n(i, j))^2}}$$

来衡量, 其中 \bar{u} 为图像 u 所有像素的平均值, SNR 值越小, 噪声越严重。

下面利用本文算法分别对 3 幅模糊含噪图像进行去噪去模糊处理, 并与其他方法的恢复效果进行比较, 恢复效果利用改进信噪比 (ISNR), 即

$$ISNR = 10 \log_{10} \frac{\|u - f\|^2}{\|u - u_r\|^2}$$

来进行衡量, 其中 u, u_r, f 分别表示原始图像、恢复图像和降质图像拉直形成的向量, ISNR 值越大, 说明图像恢复的效果越好。Zheng 等人在文献[10]中提出了贝叶斯双正则化方法求解并用下式作为变指数、线性增长函数的数值近似, 即

$$\text{div} \varphi_{i,j} = |\nabla u_{i,j}|^{p_{i,j}-2} [(p_{i,j} - 1) \nabla^2 u_{i,j} +$$

$$(2 - p_{i,j}) |\nabla u_{i,j}| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u_{i,j}}{|\nabla u_{i,j}|} \right) + (\nabla p_{i,j})^T \nabla u_{i,j} \log |\nabla u_{i,j}|]$$

Zheng 讨论的是模糊算子未知的情况,此处也采用 Zheng 提出的上述数据驱动项作为正则项,并利用时间步进法来求解图像的恢复问题,可得下述对比模型:

$$u_{i,j}^{(k+1)} = u_{i,j}^{(k)} + d_t \{ -\operatorname{div}(\varphi_{i,j}^{(k)}) + \alpha [\mathbf{K}^T (\mathbf{K} u^{(k)} - \mathbf{f})]_{i,j} \} \quad (18)$$

而总变差模型 (ROF 模型) 的求解公式为

$$u_{i,j}^{(k+1)} = u_{i,j}^{(k)} + d_t \left\{ -\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u_{i,j}^{(k)}}{|\nabla u_{i,j}^{(k)}|} \right) + \alpha [\mathbf{K}^T (\mathbf{K} u^{(k)} - \mathbf{f})]_{i,j} \right\}$$

本文算法中,

$$\nabla_x^\pm u_{i,j} = \pm (u_{i\pm 1,j} - u_{i,j}),$$

$$\nabla_y^\pm u_{i,j} = \pm (u_{i,j\pm 1} - u_{i,j}),$$

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u_{i,j}}{|\nabla u_{i,j}|} \right) = \nabla_x^- \left(\frac{\nabla_x^+ u_{i,j}}{|\nabla u_{i,j}|} \right) + \nabla_y^- \left(\frac{\nabla_y^+ u_{i,j}}{|\nabla u_{i,j}|} \right)$$

实验结果如下:

实验 1

该实验采用 1 维图像 (图 1 (a)), 离散点个数为 200), 先对其进行均匀模糊再添加噪声 ($\| \mathbf{n} \| = 0.45 \| \mathbf{K} u \|$), 得到降质图像 (图 1 (c)), 实验参数 $\beta = 0.0001, tol = 0.0001$, 图 1 (d) 为 $\alpha = 3.5$, 时间间隔 $d_t = 0.01$ 时, ROF 模型的恢复结果, 图 1 (e) 为式 (18) 模型的恢复结果, 参数选取如下: $\sigma = 0.015, k_1 = 12000, \varepsilon = 0.04, \alpha = 2$, 时间间隔 $d_t = 0.01$, 对于 1 维信号, 通常仅添加非负约束条件, 对应于本文算法, 仅考虑约束集 \mathbf{A}^-, \mathbf{I} , 通过对求解公式做简单调整后, 即可求得恢复结果 (图 1 (f)), 其中实验参数选为 $\sigma = 0.0156, k_1 = 7500, \varepsilon = 0.06, k_2 = 0.8, \alpha = 0.5, \mu = 0.00001$, 对比数值结果可见, 本文方法的恢复图像的 ISNR 值对比其他方法恢复图像的 ISNR 值由 9.2255 dB 提高至 10.2219 dB。

实验 2

该实验是采用原始清晰图像 (图 2 (a)), 先生成 5×5 的点扩散矩阵, 并对其进行 Gauss ($\sigma = 1.5$) 模糊后, 再添加 SNR 值为 4 dB 的白噪声, 即得到降质图像 (图 2 (c)), 实验参数选为 $\beta = 0.01, tol = 0.001$, 图 2 (d) 为 $\alpha = 0.16, d_t = 0.8$ 时, ROF 模型的恢复结果, 图 2 (e) 为式 (18) 模型的恢复结果, 参数选取为

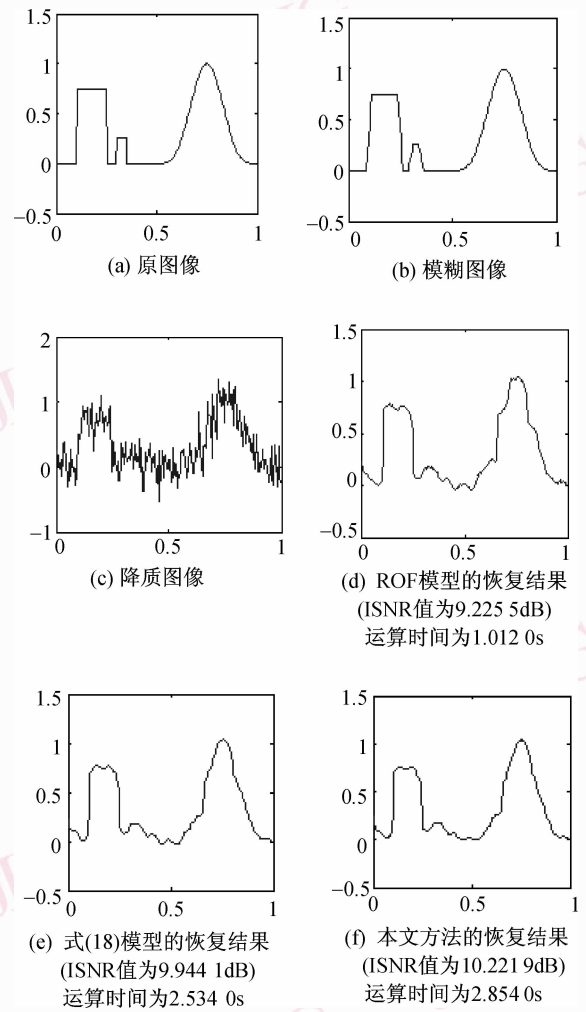


图 1 实验 1 图像的恢复结果

Fig. 1 The restored results of test image 1

$\sigma = 2, k_1 = 0.05, \varepsilon = 4.5, \alpha = 0.14, d_t = 0.5$, 图 2 (f) 为本文算法的恢复结果, 实验参数选取为 $\sigma = 2.5, k_1 = 0.05, \varepsilon = 10, k_2 = 600, \alpha = 9.6, \mu = 0.006$, 由图 2 数值结果比较可见, 本文算法恢复图像的 ISNR 值比其他恢复图像的 ISNR 值由 6.4630 dB 提高至 7.2673 dB。

实验 3

该实验采用清晰图像 (图 3 (a)), 先生成 7×7 的点扩散矩阵, 并对其进行 Gauss ($\sigma = 10$) 模糊后, 再添加 SNR 值为 10 dB 的白噪声, 即得到降质图像 (图 3 (c)), 实验参数 $\beta = 0.01, tol = 0.001$, 图 3 (d) 为 $\alpha = 2, d_{time} = 0.6$ 时, ROF 模型的恢复结果, 图 3 (e) 为式 (18) 模型的恢复结果, 实验参数选为 $\sigma = 1.4, k_1 = 0.06, \varepsilon = 12, \alpha = 5.5, d_{time} = 0.1$, 图 3 (f) 为本文算法的恢复结果, 实验参数选取为: $\sigma = 1.3,$

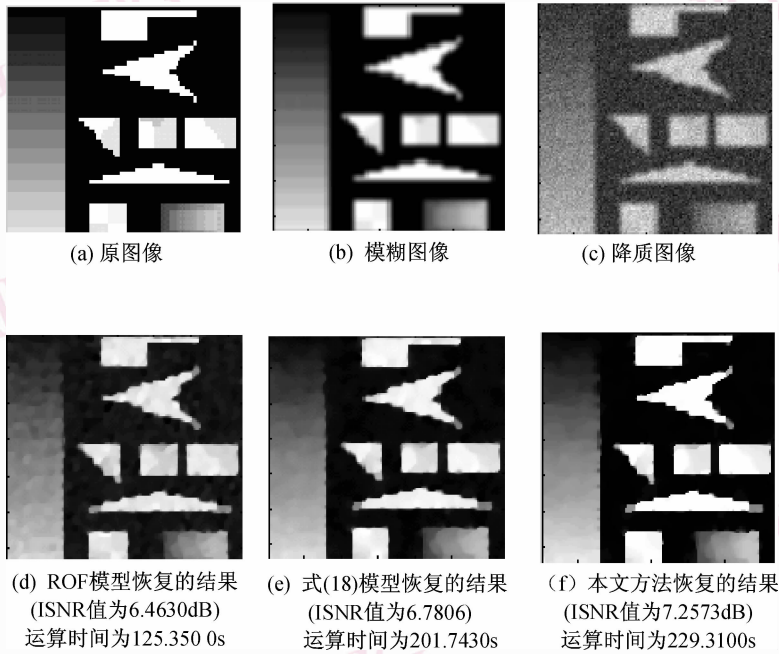


图 2 实验 2 图像的恢复结果

Fig. 2 The restored results of the test image2



图 3 实验 3 图像的恢复结果

Fig. 3 The restored results of test image

$k_1 = 0.09, \varepsilon = 2, k_2 = 500, \alpha = 0.22, \mu = -0.0002$, 图 3 数值对比结果表明,本文算法恢复图像的 ISNR 值比其他恢复图像的 ISNR 值由 4.4573 dB 提高至 5.5612 dB。

由于算法的参数较多,因此为说明本文算法的收敛性,最后给出上述 3 幅图像 K-T 余量 $\sqrt{\|F_1\|^2 + \|F_2\|^2 + \|F_3\|^2}$ 的迭代变化曲线(如图 4 所示),由图 4 可见,本文算法是收敛的。

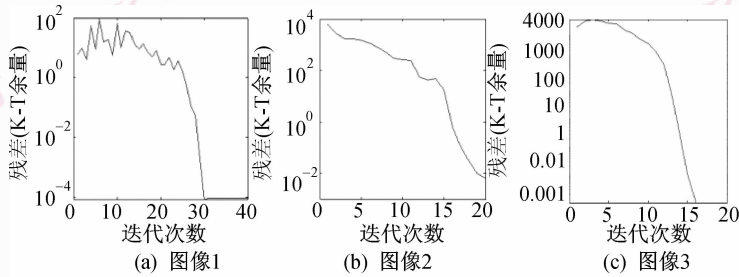


图 4 本文算法关于实验图像 1,2,3 的收敛性分析图

Fig. 4 Convergence profiles for the test image 1,2,3

5 结 论

经典的总变差正则化模型已被广泛应用到了图像去噪、去模糊处理中,且也取得了不错的恢复效果,尤其是对图像边缘的恢复,但处理后的图像仍存在梯子现象,本文算法根据图像特征,更加合理地自适应地选取正则项及正则参数,在添加有界约束条件后,再利用原对偶积极集方法进行数值求解。实验表明,与传统的 ROF 模型相比较,本文算法针对不同性质的图像,其恢复后图像的 ISNR 及视觉效果均有不同程度的提高,这说明本文算法是有效的。

参考文献 (References)

- 1 Rudin Leonid I, Osher Stanley, Fatemi Emad. Nonlinear total variation based noise removal algorithms [J]. *Physica D*, 1992, **60**(1-4):259-268.
- 2 Chan Tony F, Esedoglu Selim, Park Frederick E. A Fourth Order Dual Method for Staircase Reduction in Texture Extraction and Image Restoration Problems [R]. Technical Reports:05-28, University of California, Los Angeles, CA, USA.
- 3 Chambolle Antomin, Lions P Louis. Image recovery via total variation minimization and related problems [J]. *Numerical Mathematics*, 1997, **76**(2): 167-188.
- 4 Blomgren Peter, Chan Tony F, Mulet Pep, *et al.* Total variation image restoration: Numerical methods and extensions [A]. In: *Proceedings*

of 1997 IEEE International Conference on Image Processing III [C], Santa Babara, CA, USA, 1997: 384-387.

- 5 Levine Stacey, Stanich John, Chen Yum-mei. Image Restoration Via Nonstandard Diffusion [R]. Technical Reports:04-01, Duquesne University, Pittsburg Pennsylvania, USA.
- 6 Bardsley Johnathan M, Vogel Curtis R. A nonnegatively constrained convex programming method for image reconstruction [J]. *SIAM Journal of Computed Science*, 2004, **25**(4): 1326-1343.
- 7 Hanke Martin, Nagy James, Vogel Curtis R. Quasi-Newton approach to nonnegative image restoration [J]. *Linear Algebra and its Applications*, 2000, **316**(1): 223-236.
- 8 Krishnan D, Lin Ping, Yip Andy M. A Primal-dual Active-set Method for Nonnegativity Constrained Total Variation Deblurring Problems [R]. Technical Reports:07-03, University of California, Los Angeles, CA, USA. 2007
- 9 Chen Yun-mei, Levine Stacey, Rao Murali. Variable exponent, linear growth functionals in imgae restoration. *SIAM [J]. Journal of Applied*, 2006, **66**(4):1383-1406.
- 10 Zheng Hong-wei, Hellwich Olaf. Adaptive data-driven regularization for variational image restoration in the BV space [A]. In: *International Conference on Computer Vision Theory and Applications [C], Barcelona Spain, 2007.*
- 11 Strong David, Blomgren Peter, Chan Tony F. Spatially Adaptive Local Feature Driven Total Variation Minimizing Image Restoration [R]. Technical Reports: 97-32, University of California, Los Angeles, CA, USA. 1997.
- 12 Chan Tony F, Golub Gene H, Mulet Pep. A nonlinear primal-dual method for total variation based image restoration [J]. *SIAM Journal of Computed Science*, 1999, **20**(6): 1964-1977.